Effet magnétron.

Question 1 :

Une cathode cylindrique, d'axe Oz, de rayon a est à un potentiel nul. Elle est chauffée par un courant continu d'intensité I qui la parcourt et elle émet avec une vitesse négligeable des électrons (en très petit nombre) qui peuvent être recueillis par une anode coaxiale de rayon b supérieur à a, portée à un potentiel positif U. Calculer, dans l'espace entre anode et cathode, les champs magnétique et électrique qui y règnent.

Soit un point M de coordonnées polaires r, θ, z. Le plan méridien passant par M est un plan de symétrie donc le champ magnétique lui est orthogonal. Il y a de plus invariance par rotation et translation selon Oz. Ces conditions de symétrie permettent d'affirmer que, dans la base locale en cylindriques, $\overrightarrow{B}(M) = B(r)\,\overrightarrow{e_\theta}$. Pour M entre anode et cathode, on va appliquer le théorème d'Ampère à un cercle Γ d'axe Oz passant par M, donc de rayon r, et enlaçant le courant I de l'anode.

$$\oint_\Gamma \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \oint_\Gamma B(r)\,\mathrm{d}l = B(r)\oint \mathrm{d}l = 2\,\pi\,r\,B(r) = \mu_0\,I \quad \text{d'où} \quad \overrightarrow{B} = \frac{\mu_0\,I}{2\,\pi\,r}\,\overrightarrow{e_\theta}$$

Pour le champ électrique, il est contenu dans les deux plan de symétrie que sont les plans passant par M et respectivement contenant Oz et perpendiculaire à Oz. Il est donc radial et les invariances précités permettent d'affirmer que $\overrightarrow{E}(M) = E(r)\,\overrightarrow{e_r}$. On va appliquer le théorème de Gauss à un cylindre Σ d'axe Oz de rayon r, de hauteur h arbitraire et complété, pour en faire une surface fermée , par deux disques de même rayon et même axe. Le flux à travers ces deux disques dont les vecteurs surfaces sont parallèles à Oz sont nuls et l'invariance par translation permet d'affirmer que la charge contenue par ce cylindre et située sur la cathode, est proportionnelle à sa hauteur, on note $Q = \lambda\,h$. On a négligé la charge des électrons qui se déplacent entre anode et cathode.

$$\oint\!\!\!\oint_\Sigma \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iint E(r)\,\mathrm{d}S = E(r)\iint \mathrm{d}S = 2\,\pi\,r\,h\,E(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda\,h}{\varepsilon_0} \quad \text{d'où} \quad \overrightarrow{E} = \frac{\lambda}{2\,\pi\,\varepsilon_0\,r}\,\overrightarrow{e_r}$$

Tout cela est bien beau mais λ n'est pas une donnée du problème, c'est la différence de potentiel entre anode et cathode qui l'est. Remontons donc à la fonction potentiel qui, au vu des symétries et invariances ne dépend que de r.

$$\overrightarrow{E} = -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V(r) \qquad \text{soit} \qquad \frac{\lambda}{2\,\pi\,\varepsilon_0\,r}\,\overrightarrow{e_r} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\,\overrightarrow{e_r}$$

d'où par intégration

$$V(r) = -\frac{\lambda}{2\,\pi\,\varepsilon_0}\,\ln(r)$$

et

$$U = V(b) - V(a) = -\frac{\lambda}{2\,\pi\,\varepsilon_0}\,\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

On tire de cette dernière expression λ en fonction de U et l'on reporte dans l'expression de $\overrightarrow{E}$

$$\overrightarrow{E} = \frac{-U}{r\,\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\,\overrightarrow{e_r}$$

Question 2 :

Montrer qualitativement que le mouvement d'un électron se fait dans un plan méridien contenant Oz, décrire qualitativement son mouvement. Montrer toujours qualitativement qu'au delà d'une intensité de chauffage I_m, les électrons ne peuvent plus atteindre l'anode.

Sans calcul, la force électrique est radiale comme le champ électrique et la force magnétique, orthogonale au champ magnétique orthoradial, est dans un plan méridien. L'accélération est toujours dans un plan méridien. Si à l'instant t la vitesse est aussi dans ce plan, alors il en est de même pour $\overrightarrow{v}(t+\mathrm{d}t) \approx \overrightarrow{v}(t) + (\mathrm{d}\overrightarrow{v}/\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}t$. Comme initialement, la vitesse est nulle, de proche en proche, on peut pressentir, sinon affirmer, que la vitesse donc le mouvement reste dans un même plan méridien.

Initialement la vitesse est nulle et la force magnétique aussi ; la seule force est radiale et l'électron amorce un mouvement radial. Sa vitesse croît et une force magnétique axiale apparaît qui courbe la trajectoire. Plus l'intensité électrique est intense, plus l'est le champ magnétique et plus la trajectoire est courbée ; son rayon de courbure diminue et, en y mettant le paquet, la trajectoire finira par être un rond[1] suffisamment petit pour ne plus croiser l'anode.

Question 3 :

Mettre en équations le mouvement d'un électron. Prouver qu'il se fait dans un plan méridien contenant Oz. Retrouver le théorème de l'énergie cinétique. Exprimer en fonction de r la composante de la vitesse selon Oz. Calculer l'intensité de chauffage I_m au delà de laquelle les électrons ne peuvent plus atteindre l'anode.

En négligeant son poids pour les raisons habituelles, l'équation du mouvement d'un électron de masse m et de charge $-e$ est

$$m\,\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = -e\,(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B})$$

avec $\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{e_r} + z\,\overrightarrow{e_z}$, on tire classiquement

$$\overrightarrow{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{e_r} + r\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta} + \dot{z}\,\overrightarrow{e_z}$$

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,\overrightarrow{e_r} + (2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta})\,\overrightarrow{e_\theta} + \ddot{z}\,\overrightarrow{e_z}$$

Notons $\overrightarrow{B} = (\alpha/r)\,\overrightarrow{e_\theta}$ et $\overrightarrow{E} = -(\beta/r)\,\overrightarrow{e_r}$ avec $\alpha = \mu_0\,I/2\,\pi$ et $\beta = U/\ln(b/a)$. On reporte tout ce beau monde dans l'équation du mouvement et l'on projette sur les trois axes.

$$\begin{cases} m\,(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2) = \dfrac{e\,\beta}{r} + \dfrac{e\,\alpha\,\dot{z}}{r} \\ m\,(2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta}) = 0 \\ m\,\ddot{z} = -\dfrac{e\,\alpha\,\dot{r}}{r} \end{cases}$$

En multipliant la seconde par r et divisant par m, on reconnaît une vieille connaissance

$$2\,r\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r^2\,\ddot{\theta} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\,\dot{\theta}) = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2\,\dot{\theta} = Cte$$

Or pour $r = a$ les électons ont une vitesse nulle et leur composante orthoradiale $r\,\dot{\theta}$ l'est aussi, donc la constante d'intégration est nulle et

$$r^2\,\dot{\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = Cte$$

ce qui prouve que le mouvement a lieu dans un plan méridien défini par la valeur initiale de θ. Dans ces conditions les équations du mouvement se simplifient en

$$\begin{cases} m\,\ddot{r} = \dfrac{e\,\beta}{r} + \dfrac{e\,\alpha\,\dot{z}}{r} \\ \\ m\,\ddot{z} = -\dfrac{e\,\alpha\,\dot{r}}{r} \end{cases}$$

[1] Un rond pas tout à fait clos, finissant par un trait horizontal, comme dit Georges Perec dans *La disparition*.

Redécouvrons le théorème de l'énergie cinétique en multipliant la première par $\dot{r}$ et la seconde par $\dot{z}$ et en sommant : deux termes se simplifient et

$$m\,(\dot{r}\,\ddot{r}+\dot{z}\,\ddot{z}) = m\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{r}^2+\dot{z}^2}{2}\right) = \frac{e\,\beta\,\dot{r}}{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(e\,\beta\,\ln r)$$

$$\text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\,m\,\overrightarrow{v}^2 - e\,V(r)\right) = 0$$

On reconnaît aisément, dans cette expression l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de la charge $(-e)$ dans le potentiel $V(r)$. On aurait donc pu trouver ce résultat sans calculs en invoquant le théorème de l'énergie mécanique sachant que la force magnétique ne travaille jamais car elle est orthogonale à la vitesse.

A l'instant initial, la vitesse est nulle et $r = a$; on peut donc affirmer que

$$\frac{1}{2}\,m\,\overrightarrow{v}^2 - e\,V(r) = \frac{1}{2}\,m\,\overrightarrow{v}^2 - e\,\beta\,\ln r = -e\,\beta\,\ln a$$

La deuxième équation du système ci-dessus, à savoir $m\,\ddot{z} = -\frac{e\,\alpha\,\dot{r}}{r}$ a une intégrale première évidente :

$$m\,\dot{z} = -e\,\alpha\,\ln r + Cte$$

soit grâce aux conditions initiales :

$$m\,\dot{z} = -e\,\alpha\,\ln\left(\frac{r}{a}\right) \qquad \text{(équation 1)}$$

En combinant avec

$$\frac{1}{2}\,m\,(\dot{r}^2+\dot{z}^2) = e\,\beta\,\ln\left(\frac{r}{a}\right)$$

on tire

$$\dot{r}^2 = \frac{2\,e\,\beta}{m}\,\ln\left(\frac{r}{a}\right) - \frac{e^2\,\alpha^2}{m^2}\,\ln^2\left(\frac{r}{a}\right) \qquad \text{(équation 2)}$$

Quand r croît, $\dot{r}^2$ augmente puis diminue jusqu'à possiblement s'annuler pour $r = r_c$ tel que

$$\frac{2\,e\,\beta}{m}\,\ln\left(\frac{r_c}{a}\right) - \frac{e^2\,\alpha^2}{m^2}\,\ln^2\left(\frac{r_c}{a}\right) = 0$$

$$\text{soit} \qquad \ln\left(\frac{r_c}{a}\right) = \frac{2\,m\,\beta}{e\,\alpha^2}$$

Si r_c est plus grand que b, l'électron atteint l'anode, sinon, il retourne vers la cathode. La valeur critique de I est donc telle que

$$\ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{2\,m\,\beta}{e\,\alpha^2} = \frac{2\,m}{e}\,\frac{U}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\,\left(\frac{2\,\pi}{\mu_0\,I_m}\right)^2$$

$$\text{soit} \qquad I_m = \frac{2\,\pi}{\mu_0\,\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\,\sqrt{\frac{2\,m\,U}{e}}$$

Remarque : Après avoir pris la racine carrée de l'équation 2, on peut séparer les variables pour espérer trouver $r(t)$ puis en reportant dans l'équation 1 et en intégrant, trouver $z(t)$. Malheureusement, on tombe sur des fonctions non intégrables. Une résolution numérique, par Maple par exemple, sera la seule voie possible.

Autre remarque : la phase de calcul est plutôt délicate mais elle relève d'un type de situation assez fréquent dès que l'on fait de la recherche.